PENDUGA TAK BIAS UNTUK VARIANCE

Margaretha Ohyver
Jurusan Statistika, School of Computer Science, Universitas Bina Nusantara
Jl. Kh.Syahdan No.9, Palmerah, Jakarta 11480, Indonesia
*Email: mohyver@binus.edu

Parameter merupakan ukuran deskriptif yang menggambarkan populasi. Nilai dari parameter tersebut tidak dapat diketahui secara tepat bahkan dengan mengukur seluruh anggota populasi. Berdasarkan hal tersebut maka yang dapat dilakukan adalah melakukan pendugaan terhadap nilai-nilai parameter. Nilai dari pendugaan disebut dengan penduga atau statistik. Nilai penduga ini diperoleh dari sampel. Pendugaan akan selalu menghasilkan error atau kesalahan. Sebagai peneliti, yang dapat dilakukan adalah menimimalkan error atau kesalahan tersebut. Ada beberapa sifat dari penduga yang baik, yaitu tak bias, efisien, suficient, dan konsisten.

Salah satu contoh parameter populasi adalah variance. Parameter ini biasa dilambangkan dengan σ^2. Beberapa orang sering keliru dalam memberikan penduga dari σ^2. Kekeliruan ini terletak pada penggunaan persamaan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ sebagai penduga dari σ^2, dimana seharusnya penduga dari σ^2 adalah $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$. Berikut akan ditunjukkan bahwa $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ merupakan penduga tak bias dari σ^2, sedangkan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ adalah penduga bias. Untuk membedakan maka $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ akan ditulis $s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ dan $s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$.

<u>Definisi 1</u>

Sebuah penduga titik $\hat{\theta}$ disebut penduga tak bias dari parameter θ jika $E(\hat{\theta}) = \theta$ untuk semua nilai θ yang mungkin. Jika berlaku sebaliknya maka $\hat{\theta}$ disebut bias. Besarnya bias adalah $B = E(\hat{\theta}) - \theta$.

Akan dibuktikan bahwa $s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ adalah penduga tak bias bagi σ^2. Dikatakan tak bias jika $E(s_1^2) = \sigma^2$.

Bukti:

$$E(s_1^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}\right)$$

$$E(s_1^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\big((x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)\big)^2\right)$$

$$E(s_1^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(x_i - \mu)^2 - nE(\bar{x} - \mu)^2\right)$$

Diketahui $E((x_i - \mu)^2) = \sigma^2$ maka

$$E(s_1^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(s_1^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2)$$

$$E(s_1^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sigma^2(n-1)\right)$$

$$E(s_1^2) = \sigma^2$$

Untuk $E(s_2^2)$ akan diperoleh $E(s_2^2) = \frac{1}{n}\left(\sigma^2(n-1)\right)$.

Berdasarkan hal ini maka terbukti bahwa $E(S_1^2) = \sigma^2$ atau $E(s^2) = \sigma^2$ sehingga $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ adalah penduga tak bias untuk σ^2.

Sumber

Ramachandran, K. M., and Tsokos, C.P. (2009). Mathematical Statistics with Applications. Elsevier, California.