IndoMS Journal on Industrial and Applied Mathematics
Volume. **2**, Issue. 1 (2015), pp. 9-13

GELOMBANG MONOKROMATIK ANTARMUKA PADA DUA LAPISAN FLUIDA

LUSIA K. BUDIASIH*, L. H. WIRYANTO†, DAN SUDI MUNGKASI‡

Ringkasan. Perambatan gelombang di antara dua fluida dipelajari. Fluida dengan rapat massa lebih rendah terlentang di atas fluida lain yang lebih berat, dengan keduanya berada diantara dua plat datar. Untuk gelombang monokromatik, hubungan dispersi antara bilangan gelombang dan frekuensi ditentukan dari persamaan pengaturan yang didasarkan pada asumsi fluida ideal dan aliran irrotasional, sehingga dapat diamati pengaruh besaran-besaran kedalaman dan rapat massa masing-masing fluida pada gelombang monokromatik tersebut. Dalam hal tidak ada fluida ringan pada lapisan atas, hasil yang diperoleh sesuai dengan hubungan dispersi gelombang monokromatik pada permukaan fluida satu lapis. Selain itu, dapat ditentukan hubungan dispersi untuk kasus kedalaman fluida atas yang sangat besar.

Kata kunci. fluida dua lapis, gelombang monokromatik, hubungan dispersi

Abstract. Wave propagation between two fluids is studied. The fluid having lower density lies on the other one, where both are in between two flat plates. For monochromatic waves, the dispersion relation between wave number and frequency is determined from an equation based on the assumption of ideal fluid and irrotational flow, so it can be observed the influence of depth magnitudes and density of each fluid to the monochromatic waves. In case there is not a light fluid as the top layer, the obtained results match with the dispersion relation of monochromatic waves on the surface of one layer fluid. In addition, the dispersion relation can be determined for the case of a very large depth of the top fluid.

Key words. two layer fluids, monochromatic waves, dispersion relation

1. Pendahuluan. Gelombang monokromatik adalah gelombang yang berkarakteristik tunggal. Dalam hal ini gelombang berbentuk sinusoidal dengan satu nilai bilangan gelombang k, yang terkait oleh frekuensi ω yang ada. Pada gelombang yang berada pada permukaan air, dengan kedalaman, hubungan antara bilangan gelombang dan frekuensi dinyatakan oleh

$$\frac{\omega^2}{gk} = \tanh(hk), \tag{1.1}$$

dengan g menyatakan percepatan gravitasi. Penurunan dapat dilihat pada buku-buku dinamika fluida, diantaranya Mei [1]. Wiryanto [2] juga menurunkan, untuk kemudian digunakan menghitung persentase refleksi dan transmisi gelombang saat gelombang monokromatik melalui suatu gundukan, dan kemudian digunakan oleh Wiryanto dan Jamhuri [3] untuk kasus dua gundukan.

Untuk fluida dua lapis di antara dua bidang datar sebagai batasnya, gelombang monokromatik yang merambat diantara kedua fluida mempunyai hubungan antara bilangan gelombang k dan frequensi ω yang lebih rumit. Pengaruh parameter pada sistem fluida tersebut akan muncul pada hubungan dispersi, yaitu kedalaman dan rapat massa dari masing-masing fluida.

Perambatan gelombang internal telah banyak dipelajari oleh para peneliti, diantaranya Choi dan Camassa [4], serta Choi dan Camassa [5], yang memformulasikan perambatan gelombang dalam persamaan gabungan yang bertipe Korteweg de Vries dan gelombang panjang menengah (*intermediate long wave*). Benjamin [6] dan Ono [7] memformulasikan perambatan gelombang dalam persamaan yang dikenal sebagai persamaan Benjamin-Ono, dimana persamaan tersebut memuat suku yang mengandung transformasi Hilbert, yang tentunya sulit diselesaikan secara numerik karena mengandung bentuk integral tak wajar. Model tersebut kemudian dikembangkan oleh Tuck dan Wiryanto [8] dalam model berupa persamaan gelombang panjang komposit (*composite long wave*). Tuck dan Wiryanto menyelesaikan model yang ada secara analitik maupun numerik, dan menunjukkan adanya perbedaan dengan hasil yang diperoleh di [6] dan [7], akan tetapi gelombang yang diperoleh dalam bentuk periodik, sehingga memungkinkan mengamati perambatan gelombang menggunakan bentuk monokromatik.

Pada tulisan ini disajikan penurunan hubungan dispersi dari gelombang monokromatik antar muka pada sistem dua fluida, berdasarkan fungsi potensial. Persamaan pengatur pada tiap lapis terhubung

*Mahasiswa Program Doktor pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10, Bandung 40132, Indonesia; Dosen pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Mrican, Tromol Pos 29, Yogyakarta 55002, Indonesia, Email: lusia_kris@usd.ac.id

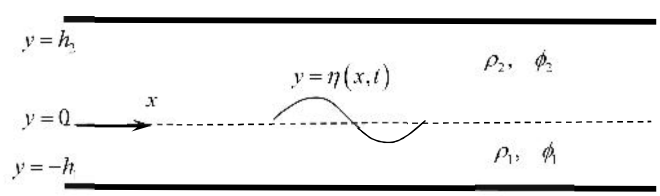
†Dosen pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10, Bandung 40132, Indonesia, Email: leo@math.itb.ac.id

‡Dosen pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Mrican, Tromol Pos 29, Yogyakarta 55002, Indonesia, Email: sudi@usd.ac.id

oleh kondisi antar muka yang berupa kekontinuan tekanan. Pada tahap awal, fungsi potensial pada tiap lapis menjadi masalah yang harus ditentukan, dengan melibatkan bentuk sinusoidal pada pertemuan kedua fluida. Kemudian dengan menggunakan tekanan yang kontinu, hubungan dispersi diperoleh. Untuk menentukan fungsi potensial, digunakan metoda pemisah peubah, sebagai metoda standar yang diperkenalkan dalam persamaan diferensial parsial, lihat diantaranya pada Kreyszig [9].

Dari hubungan dispersi yang diperoleh, analisa dilakukan dengan memperkecil rapat massa fluida lapis atas menuju nol, yang secara fisis sistem fluida menjadi satu lapis, dan hubungan dispersi memberikan hasil persamaan (1.1). Selanjutnya, dengan memperbesar kedalaman fluida lapis atas diperoleh hubungan dispersi yang dapat digunakan untuk mengamati pengaruh udara pada gelombang permukaan. Dalan hal ini dipertimbangkan udara yang memuat uap air, dengan rapat massa yang kecil tetapi tidak diabaikan.

2. Formulasi Masalah. Perhatikan perambatan gelombang yang terdapat pada pertemuan dua permukaan fluida yang tidak tercampur. Misalkan fluida yang berada pada lapis atas mempunyai rapat massa ρ_2 dan bagian atasnya dibatasi oleh bidang datar, dengan ketebalan h_2. Pada lapis bawah, fluida mempunyai rapat massa ρ_1 ($\rho_1 > \rho_2$) dan ketebalan h_1 dengan batas bawah juga bidang datar. Sebagai koordinat, digunakan Kartesius dengan sumbu datar x dipilih berimpit dengan pertemuan antar muka, dan sumbu y ditetapkan tegak lurus terhadap sumbu x di suatu titik. Oleh karena itu gelombang antar muka dinyatakan sebagai $y = \eta(x,t)$. Sketsa dari gelombang dan koordinat diilustrasikan pada GAMBAR 2.1.



GAMBAR 2.1. *Sketsa gelombang dan koordinat*

Dengan menggunakan asumsi fluida yang incompressible dan tak kental, sedangkan alirannya irrotasional, maka masalahnya adalah bagaimana menentukan fungsi potensial $\phi_1(x,y,t)$ untuk fluida bawah dan $\phi_2(x,y,t)$ untuk fluida atas yang memenuhi

$$\phi_{1_{xx}} + \phi_{1_{yy}} = 0, \tag{2.1}$$

$$\phi_{2_{xx}} + \phi_{2_{yy}} = 0, \tag{2.2}$$

pada setiap daerah fluida, serta memenuhi kondisi batas kaku di dasar dan di atas

$$\phi_{1_y}(x, -h_1, t) = 0, \quad \phi_{2_y}(x, h_2, t) = 0. \tag{2.3}$$

Lebih lanjut, kondisi di antarmuka $y = \eta(x,t)$ memenuhi

$$\eta_t + \phi_{1_x}\eta_x - \phi_{1_y} = 0, \tag{2.4}$$

$$\eta_t + \phi_{2_x}\eta_x - \phi_{2_y} = 0 \tag{2.5}$$

dan kondisi tekanan

$$\lim_{y\to\eta^+} p = \lim_{y\to\eta^-} p, \tag{2.6}$$

dimana tekanan p dihitung menggunakan persamaan Bernoulli

$$\frac{p}{\rho_j} = \phi_{j_t} + \frac{1}{2}(\phi_{j_x}^2 + \phi_{j_y}^2) + gy. \tag{2.7}$$

Indeks j=1 digunakan untuk fluida bawah dan 2 untuk fluida atas.

Formulasi di atas tentunya tidak mudah diselesaikan karena selain η tidak diketahui juga persamaan yang hendak diselesaikan bersifat tak linear. Pada tulisan ini, pembahasan dibatasi pada bentuk linearnya, sehingga suku-suku tak linear dibuang, dan dipertimbangkan gelombang berbentuk sinusoidal, tetapi dinyatakan dalam bentuk kompleks

$$\eta(x,y) = ae^{-i(kx-\omega t)}, \tag{2.8}$$

dengan $i = \sqrt{-1}$, k bilangan gelombang dan ω frekuensi gelombang.

3. Hubungan Dispersi. Untuk menentukan ϕ_1 dan ϕ_2, perhatikan fungsi dengan variabel yang dapat dipisahkan dalam bentuk

$$\phi_1(x,y,t) = S_1(x,t)F_1(y), \tag{3.1}$$

$$\phi_2(x,y,t) = S_2(x,t)F_2(y). \tag{3.2}$$

Dengan menggunakan syarat batas pada persamaan (2.3), diperoleh

$$F_1'(-h_1) = 0 \quad \text{dan} \quad F_2'(h_2) = 0. \tag{3.3}$$

Sedangkan syarat batas linear dari persamaan (2.4), berbentuk $\eta_t = \phi_1$, pada y=0 memberikan hubungan

$$i\omega\eta = S_1(x,t)F_1'(0). \tag{3.4}$$

Sama halnya untuk syarat batas linear dari persamaan (2.5), diperoleh

$$i\omega\eta = S_2(x,t)F_2'(0). \tag{3.5}$$

Dengan menyamakan η pada kedua hasil tersebut, maka dapat dinyatakan bahwa S_1 sebanding dengan S_2, yang ditulis sebagai $S_1 = \lambda S_2$, begitu juga dengan F, yaitu $F_2'(0) = \lambda F_1'(0)$. Tanpa mengurangi keumuman dan keperluan dalam menyelesaikan persamaan (2.1)-(2.2), ditetapkan $F_1'(0) = 1$, sehingga dapat diperoleh $F_2'(0) = \lambda$ dan $S_2(x,t) = \frac{1}{\lambda} i\omega\eta(x,t)$. Hasil ini kemudian dikembalikan pada pemisahan variabel pada ϕ_2 yang memberikan

$$\phi_2 = \frac{i\omega}{\lambda}\eta(x,t)F_2(y). \tag{3.6}$$

Begitu juga untuk ϕ_1, setelah S_1 digantikan dengan S_2, dan menyatakan dalam η maka diperoleh

$$\phi_1 = i\omega\eta(x,t)F_1(y). \tag{3.7}$$

Masalah selanjutnya adalah menentukan F_1 dan F_2. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) pada persamaan (2.2) akan diperoleh

$$F_1'' - k^2 F_1 = 0 \tag{3.8}$$

yang mempunyai penyelesaian $F_1(y) = A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky}$ dengan A_1 dan B_1 konstan. Dengan menggunakan kondisi $F_1'(0) = 1$ dan $F_1'(-h_1) = 0$, kedua konstanta dapat diperoleh, yakni

$$B_1 = \frac{e^{-h_1 k}}{2k\sinh(h_1 k)} \quad \text{dan} \quad A_1 = B_1 + \frac{1}{k}. \tag{3.9}$$

Sama halnya untuk F_2, bila ϕ_2 disubstitusikan ke persamaan (2.3) dan diselesaikan menggunakan syarat $F_2'(0) = \lambda$ dan $F_2'(h_2) = 0$, akan menghasilkan $F_2(y) = A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}$ dengan

$$B_2 = \frac{-\lambda e^{h_2 k}}{2k\sinh(h_2 k)} \quad \text{dan} \quad A_2 = B_2 + \frac{\lambda}{k}. \tag{3.10}$$

Untuk mendapatkan hubungan dispersi antara k dan ω, digunakan ϕ_1 dan ϕ_2 yang telah diperoleh di muka pada hasil linear dari limit pada persamaan (2.6) dengan menggunakan persamaan (2.7), berbentuk

$$\rho_1(\phi_1 + g\eta) = \rho_2(\phi_2 + g\eta). \tag{3.11}$$

Setelah mensubstitusikan ϕ_1, ϕ_2 dan η pada persamaan (3.11), maka diperoleh

$$\frac{\omega^2}{k}\left[-\rho_1\left(\frac{e^{-h_1k}}{\sinh(h_1k)}+1\right)+\rho_2\left(\frac{-e^{-h_2k}}{\sinh(h_2k)}+1\right)\right]=(\rho_2-\rho_1)g, \tag{3.12}$$

sebagai hubungan dispersi.

Dalam hal fluida lapis atas tidak ada, dengan menggunakan $\rho_2 = 0$, persamaan (3.12) menghasilkan persamaan (1.1). Perhatikan bahwa $\frac{e^{-h_1k}}{\sinh(h_1k)} + 1$ dapat diuraikan menjadi $\frac{\cosh(h_1k)}{\sinh(h_1k)}$. Selanjutnya akan ditinjau bila kedalaman fluida lapis atas membesar. Persamaan (3.12) dihitung dengan mengambil $h_2 \to \infty$. Karena $\lim_{h_2\to\infty} \frac{e^{-h_2k}}{\sinh(h_2k)} = 0$ maka persamaan (3.12) menjadi

$$\frac{\omega^2}{k}\left[-\rho_1\left(\frac{e^{-h_1k}}{\sinh(h_1k)}+1\right)+\rho_2\right]=(\rho_2-\rho_1)g, \tag{3.13}$$

sebagai hubungan dispersi untuk gelombang monokromatik pada permukaan fluida, dengan memperhatikan pengaruh kerapatan udara ρ_2 di atas fluida tersebut. Untuk itu dapat digunakan ρ_2 yang kecil.

Dari hubungan dispersi yang telah diperoleh, diamati perambatan gelombang monokromatik pada antar muka. Untuk itu, dilakukan perhitungan dengan besaran-besaran $h_1 = 1, \rho_1 = 1, g = 10, \omega = 2$ dan variasikan untuk lapis atas. Lebih dahulu digunakan $h_2 = 0,8, \rho_2 = 0,8$ maka persamaan (3.12) memberikan $k = 1{,}253$ dan gelombang yang merambat, pertimbangkan gelombang merambat ke kanan, berbentuk

$$\frac{\eta(x,t)}{a} = \sin(1,253x - 2t) \tag{3.14}$$

dengan cepat rambat c=1,596. Untuk lapis atas yang dalam sekali, diperoleh k=1,011 dan cepat rambat c=1,978. Bila rapat massa lapis atas diperkecil dengan $\rho_2 = 0,05$, maka diperoleh k=0,686 dan cepat rambat c=2,915. Dapat dibandingkan gelombang monokromatik pada permukaan, tanpa lapis atas $h_2 = \infty, \rho_2 = 0$, mempunyai bilangan gelombang k=0,678 dan cepat rambat c=2,950. Perhitungan di atas dapat dilakukan untuk nilai frequensi ω yang lain. Dari perhitungan tersebut, dapat dilihat pengaruh lapis atas pada gelombang monokromatik dan cepat rambatnya.

4. Kesimpulan. Kajian singkat tentang perambatan gelombang monokromatik pada antar muka dua lapisan fluida telah dilakukan. Dalam makalah ini diasumsikan bahwa fluida dibatasi oleh dua plat yang rata. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan kajian tentang perambatan gelombang monokromatik dengan geometri plat yang tidak rata.

Ucapan Terima Kasih. Penelitian ini didukung oleh hibah penelitian desentralisasi tahun anggaran 2014 dengan nomor kontrak: 1063b/I1.001.2/PL/2014. Peneliti ketiga didukung oleh Program Studi Matematika Universitas Sanata Dharma. Oleh karena itu kami mengucapkan terima kasih atas dukungan di atas.

PUSTAKA

[1] C. C. Mei, *The applied dynamics of ocean surface waves*, World Scientific, 1989.
[2] L. H. Wiryanto, Wave propagation over a submerged bar, *ITB J. Sci.*, Vol. 42A, 2010, 81–90.
[3] L. H. Wiryanto and M. Jamhuri, Monochromatic wave over one and two bars, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8, 2014, 3017–3025.
[4] W. Choi and R. Camassa, Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, Vol. 313, 1996, 83–103.
[5] W. Choi and R. Camassa, Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, Vol. 396, 1996, 1–36.
[6] T. B. Benjamin, Interval waves of permanent form of great depth, *J. Fluid Mech.*, Vol. 25, 1966, 241–270.
[7] H. Ono, Algebraic solitary waves in stratified fluids, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 39, 1975, 1082–1091.
[8] E. O. Tuck and L. H. Wiryanto, On steady periodic interfacial waves, *J. Eng. Math.*, Vol. 42A, 2010, 81–90.
[9] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 2010.