PENURUNAN RUMUS EULER

Wikaria Gazali

Abstrak :

Makalah ini membahas tentang penurunan Rumus Euler. Untuk memperoleh model tersebut penulis menurunkan rumus Euler dari e^{x+iy} dengan mencari terlebih dahulu norm dan argumen dari e^{x+iy}. Dalam penurunan ini kita mensubstitusi norm dan argumen dari e^{x+iy} pada bilangan kompleks dalam koordinat polar, hingga diperoleh penurunan Rumus Euler.

Pendahuluan

Rumus Euler banyak digunakan dalam penyelesaian matematika atau kalkulus terutama pada penyelesaian bilangan kompleks. Rumus Euler juga dipakai pada *The Exact Iterative Riemann Solver, The Approximate Riemann Solver of Roe*, *The HLLE Riemann Solver.* Untuk memperoleh model tersebut, maka penulis menggunakan penurunan yang berasal dari $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Dalam penurunan ini kita mensubstitusi norm dan argumen dari e^{x+iy} pada bilangan kompleks dalam koordinat polar, hingga diperoleh penurunan Rumus Euler.

Penurunan Matematika

Dalam hal ini untuk mendapatkan penurunan Rumus Euler penulis menguraikan norm dan argumen dari e^{x+iy}.

Terlebih dahulu kita mencari norm dari e^{x+iy}.

Kita telah mengetahui bahwa $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, analog $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$,

sehingga $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$,

atau $e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$.

Mengingat rumus di atas berlaku untuk bilangan kompleks z, maka dengan mensubstitusi x = z, didapat $e^{z} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}$,

di mana z = x + iy (bilangan kompleks dalam koordinat Cartesius),

sehingga $e^{x+iy} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^{n}$,

$$e^{x+iy} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\frac{y}{n}\right]^{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Norm dari e^{x+iy} adalah :

$$\left|e^{x+iy}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{2}+\left(\frac{y}{n}\right)^{2}}\right]^{n} ,$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^{2}}{n^{2}}+\frac{y^{2}}{n^{2}}\right)^{1/2}\right]^{n} ,$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^{2}+y^{2}}{n^{2}}\right)\right]^{1/2 n} ,$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^{2}+y^{2}}{n^{2}}\right)(1/2 n)} ,$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)} \quad ,$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2+y^2}{2\infty}\right)} \quad ,$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x+0)} \quad ,$$

Jadi $\left|e^{x+iy}\right| = e^{x}$ ……………………………………………………………………..(2)

Untuk mencari argumen dari e^{x+iy}, terlebih dahulu kita membahas bilangan kompleks dalam koordinat Polar $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$, sehingga $\theta = arc\ \mathrm{tg}\frac{y}{x}$, dan $z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

Di mana $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$ berdasarkan Teorema De Moivre, maka $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, sehingga $\arg(z^n) = n\theta$, atau $\arg(z^n) = n\ arc\ \mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

Kemudian kita menentukan argumen dari e^{x+iy}, di mana dari persamaan (1) telah diperoleh $e^{x+iy} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\frac{y}{n}\right]^n$,

maka $$\arg(e^{x+iy}) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(arc\ \mathrm{tg}\frac{\frac{y}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) \quad ,$$

$$\arg(e^{x+iy}) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(arc\ \mathrm{tg}\frac{\frac{y}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\frac{n}{n}\right) ,$$

$$\arg(e^{x+iy}) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(arc\ \mathrm{tg}\frac{y}{n+x}\right) ,$$

$$\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{n}\left(\frac{arc\ \mathrm{tg}\dfrac{y}{n+x}}{\dfrac{y}{n+x}}\right)\frac{y}{n+x} \quad .$$

Karena $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(\frac{1}{t}\right)'}{\left(\frac{1}{t}\right)'} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = 1$,

maka $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{yn}{n+x}$, atau $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}) = \frac{y}{1}$.

Jadi $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}) = y$ ……………………………………………………….(3)

Bilangan kompleks dalam koordinat Polar $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, di mana $r = |z|$ dan $\theta = \arg(z)$, sehingga $z = |z|\left[\cos\{\arg(\mathrm{z})\} + \mathrm{i}\sin\{\arg(\mathrm{z})\}\right]$…………………………….(4)

Ambil $\mathrm{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}$, maka persamaan (4) akan berubah menjadi :

$\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}} = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}\right|\left[\cos\left\{\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}\right)\right\} + \mathrm{i}\sin\left\{\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}}\right)\right\}\right]$ ………………………………………(5)

Substitusi (2) dan (3) pada (5), sehingga persamaan (5) menjadi :

$\mathrm{e}^{\mathrm{x+iy}} = e^x\ (\cos y + \mathrm{i}\sin y)$,

$\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{iy}} = e^x\ (\cos y + \mathrm{i}\sin y)$,

sehingga $\mathrm{e}^{\mathrm{iy}} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$ ……………………………………………………….(6)

Substitusi $y = \theta$ pada persamaan (6), maka persamaan (6) berubah menjadi :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Simpulan

Pada penurunan ini telah dilakukan penurunan dengan mencari terlebih dahulu

Norm dari e^{x+iy} , yaitu $\left|e^{x+iy}\right| = e^x$ dan argumen dari e^{x+iy}, yaitu

$\arg(e^{x+iy}) = y$,kemudian dengan mensubstitusinya pada bilangan kompleks dalam

koordinat polar , yaitu $e^{x+iy} = \left|e^{x+iy}\right|\left[\cos\left\{\arg\left(e^{x+iy}\right)\right\} + i\sin\left\{\arg\left(e^{x+iy}\right)\right\}\right]$.

Penurunan penurunan Rumus Euler telah diuraikan di atas dan diperoleh penurunannya :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

di mana $\theta = arc\ \mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.

Daftar Pustaka

1. Priestley, HA (1993).*Pengantar Analisis Kompleks,* . Terjemahan Suryanto, Penerbit ITB, Bandung.
2. Purcell, EJ, Varberg,D (1997). *Calculus*. Prentice-Hall,Inc., USA.
3. Soedojo, P (1995). *Matematika Fisika dan Teknik, Ga*djah Mada, University Press, Yogyakarta.
4. Spiegel, MR (1997).*Kalkulus Lanjutan,*. Penerbit Erlangga, Jakarta.